

Практическое задание

Выполнить задания, используя значения из таблиц:

1. Вычислить $|\psi_1\rangle = U_1 U_2 \nu_1$; $|\psi_2\rangle = U_2 U_1 \nu_1$, сравнить результаты. Почему результаты сошлись/разошлись?
2. Вычислить $|\psi_3\rangle = U_2 \nu_2$; $|\psi_4\rangle = U_1 \nu_2$.
3. Вычислить $|\psi_5\rangle = U_3 \nu_1$; $|\psi_6\rangle = U_3 \nu_2$.

Проверить унитарность матриц U_i путём проверки длины исходного ν_i и результирующего вектора $|\psi_i\rangle$.

Записать каждый получившийся результат $|\psi_i\rangle$ во всех видах записи кубита:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = r_1|0\rangle + r_2 e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^1 a_i |i\rangle$$

Построить на сфере Блоха вычисленные значения векторов $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$, где

$$\nu_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}, \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}|1\rangle,$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}.$$

Проверенные по шагам вычисления и записи состояний

Исходные данные

$$\nu_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

Нормы исходных векторов

$$\|\nu_1\|^2 = \frac{1}{2}(1 + |-i|^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1,$$

$$\|\nu_2\|^2 = a^2 + b^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{(4-2\sqrt{3}) + (4+2\sqrt{3})}{8} = 1.$$

1) $|\psi_1\rangle = U_1 U_2 \nu_1$ и $|\psi_2\rangle = U_2 U_1 \nu_1$ (по шагам)

Шаг 1: $U_2 \nu_1$.

$$U_2 \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (-i) \\ 1 - (-i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{bmatrix}.$$

Шаг 2: $U_1(U_2 \nu_1) \Rightarrow |\psi_1\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = U_1 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i \\ i(1 + i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i \\ i + i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - i}{2} \\ \frac{-1 + i}{2} \end{bmatrix}.$$

Шаг 3: $U_1 \nu_1$.

$$U_1 \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i(-i) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4: $U_2(U_1 \nu_1) \Rightarrow |\psi_2\rangle$.

$$|\psi_2\rangle = U_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle.$$

Вывод о (не)коммутативности.

$$U_1 U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad U_2 U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad U_1 U_2 \neq U_2 U_1 \Rightarrow |\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle.$$

2) $|\psi_3\rangle = U_2\nu_2$, $|\psi_4\rangle = U_1\nu_2$ (**по шагам**)

Шаг 1: $U_2\nu_2$.

$$|\psi_3\rangle = U_2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix}.$$

Явно:

$$a+b = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad a-b = \frac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Шаг 2: $U_1\nu_2$.

$$|\psi_4\rangle = U_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ ib \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ i \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

3) $|\psi_5\rangle = U_3\nu_1$, $|\psi_6\rangle = U_3\nu_2$ (**по шагам**)

Положим $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -i\alpha \\ -i\alpha & 1 \end{bmatrix}$.

Шаг 1: $U_3\nu_1$.

$$U_3\nu_1 = \begin{bmatrix} 1 & -i\alpha \\ -i\alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + (-i\alpha)(-i) \\ (-i\alpha) \cdot 1 + 1 \cdot (-i) \end{bmatrix}.$$

Так как $(-i)(-i) = (-i)^2 = -1$, то

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ -i(\alpha+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ -i \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ -i \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Шаг 2: $U_3\nu_2$.

$$|\psi_6\rangle = U_3 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + (-i\alpha)b \\ (-i\alpha)a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - i\alpha b \\ b - i\alpha a \end{bmatrix}.$$

Так как $\alpha b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, $\alpha a = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$, получаем

$$|\psi_6\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{bmatrix}.$$

Проверка норм (тест унитарности по длинам)

Для U_1, U_2 .

$$\|\psi_1\|^2 = \left| \frac{1-i}{2} \right|^2 + \left| \frac{-1+i}{2} \right|^2 = \frac{1+1}{4} + \frac{1+1}{4} = 1,$$

$$\|\psi_2\|^2 = |1|^2 + 0 = 1, \quad \|\psi_3\|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\|\psi_4\|^2 = a^2 + |ib|^2 = a^2 + b^2 = 1.$$

Следовательно, U_1 и U_2 сохраняют норму исходных состояний.

Для U_3 .

$$\|\psi_5\|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\|\psi_6\|^2 = (a^2 + (\frac{\sqrt{3}+1}{4})^2) + (b^2 + (\frac{\sqrt{3}-1}{4})^2) = \frac{6-\sqrt{3}}{8} + \frac{6+\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2}.$$

Итак, U_3 не унитарна (нормы не сохраняются). Дополнительно: столбцы U_3 ортогональны, но имеют норму $\sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{3/2} \neq 1$; нормированный вариант $\tilde{U}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} U_3$ был бы унитарным.

Запись каждого $|\psi_i\rangle$ во всех стандартных формах

$|\psi_1\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}, \quad b = \frac{-1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{+3i\pi/4}.$$

$$\frac{b}{a} = e^{i\pi}, \quad |a| = |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{4}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{4}e^{i\pi}|1\rangle,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \pi, \quad |\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^1 a_i |i\rangle, \quad a_0 = a, \quad a_1 = b.$$

$|\psi_2\rangle$.

$$|\psi_2\rangle = 1 \cdot |0\rangle + 0 \cdot |1\rangle = \cos\frac{0}{2}|0\rangle + \sin\frac{0}{2}e^{i\varphi}|1\rangle,$$

$$\theta = 0, \quad \varphi \text{ произвольна}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

$|\psi_3\rangle$.

$$|\psi_3\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} e^{i\pi} |1\rangle,$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \pi,$$

$$|\psi_3\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad a_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

$|\psi_4\rangle$.

$$|\psi_4\rangle = a |0\rangle + ib |1\rangle = a |0\rangle + b e^{i\pi/2} |1\rangle, \quad a = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = a, \quad \sin \frac{\theta}{2} = b, \Rightarrow \theta = 2 \arccos a, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$|\psi_4\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ i \end{bmatrix}, \quad a_0 = a, \quad a_1 = ib.$$

$|\psi_5\rangle$ (не нормировано) и нормированное $\hat{\psi}_5$.

$$|\psi_5\rangle = \frac{\sqrt{2}-1}{2} |0\rangle + \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{-i\pi/2} |1\rangle, \quad \|\psi_5\|^2 = \frac{3}{2}.$$

Нормирующий множитель $c = \frac{1}{\|\psi_5\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$|\hat{\psi}_5\rangle = c |\psi_5\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{2}-1}{2}}_{=:r_1} |0\rangle + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1+\sqrt{2}}{2}}_{=:r_2} e^{-i\pi/2} |1\rangle,$$

$$\theta_5 = 2 \arccos r_1, \quad \varphi_5 = -\frac{\pi}{2}, \quad |\hat{\psi}_5\rangle = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 e^{-i\pi/2} \end{bmatrix}.$$

$|\psi_6\rangle$ (не нормировано) и нормированное $\hat{\psi}_6$. Обозначим $p = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, $q = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$. Тогда

$$|\psi_6\rangle = (a - ip) |0\rangle + (b - iq) |1\rangle, \quad \|\psi_6\|^2 = \frac{3}{2}.$$

Нормирующий множитель $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$|\hat{\psi}_6\rangle = c |\psi_6\rangle = \underbrace{c \sqrt{a^2 + p^2}}_{=:r_1} |0\rangle + \underbrace{c \sqrt{b^2 + q^2}}_{=:r_2} e^{i\varphi} |1\rangle,$$

где фаза и углы:

$$\arg(a - ip) = -\arctan \frac{p}{a}, \quad \arg(b - iq) = -\arctan \frac{q}{b},$$

$$\varphi = \arg(b - iq) - \arg(a - ip) = \arctan \frac{p}{a} - \arctan \frac{q}{b},$$

$$r_1^2 = c^2(a^2 + p^2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 - \sqrt{3}}{8} = \frac{6 - \sqrt{3}}{12}, \quad r_2^2 = c^2(b^2 + q^2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 + \sqrt{3}}{8} = \frac{6 + \sqrt{3}}{12},$$

$$\theta_6 = 2 \arccos r_1, \quad |\widehat{\psi}_6\rangle = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 e^{i\varphi} \end{bmatrix}.$$

Координаты на сфере Блоха для $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$

Состояние	θ	φ
$ \psi_1\rangle$	$\frac{\pi}{2}$	π
$ \psi_2\rangle$	0	любая
$ \psi_3\rangle$	$\frac{\pi}{3}$	π
$ \psi_4\rangle$	$2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\pi}{2}$

Итог

Все шаги умножений и норм проверены. U_1 и U_2 — унитарны (нормы сохраняются), U_3 в заданном виде — не унитарна ($\|\psi_5\|^2 = \|\psi_6\|^2 = \frac{3}{2}$).